

Matura 2026 – Matematyka

Poziom Rozszerzony

Pełne rozwiązania wszystkich 12 zadań

Rozwiązania zweryfikowane w pipeline'ie:
prover → cold verifier (worktree)
Zgodność końcowa: 13/13 (100%)

Egzamin z 11 maja 2026 r.

Spis treści

Zadanie 1. (2 pkt)

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7}.$$

Rozwiązanie. Korzystamy z symetrii symbolu Newtona: $\binom{n+2}{n-1} = \binom{n+2}{3}$.

$$\binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}.$$

Zatem

$$\frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7} = \frac{\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7}.$$

Dzielimy licznik i mianownik przez n^3 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7} = \frac{1}{3}$

Zadanie 2. (3 pkt)

Ze zbioru ośmiu liczb $\{1, 2, \dots, 8\}$ losujemy bez zwracania osiem razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby ustawiamy w ciąg zgodnie z kolejnością losowania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowane liczby utworzą ciąg, w którym iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów będzie liczbą podzielną przez 3.

Rozwiązanie. Liczb podzielnych przez 3 w zbiorze $\{1, \dots, 8\}$ jest dokładnie dwie: 3 i 6. Nazwijmy je T -*pozycjami* (od „trójka”).

Iloczyn trzech kolejnych wyrazów ciągu (a_1, \dots, a_8) jest podzielny przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym z sześciu okien $\{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}\}$ (dla $i = 1, \dots, 6$) znajduje się co najmniej jedna T -pozycja.

Niech T -pozycje stoją w ciągu na miejscach $p_1 < p_2$. Równoważnie: między dowolnymi sąsiadującymi T -pozycjami nie może być więcej niż 2 liczb spoza $\{3, 6\}$, ani > 2 takich liczb przed pierwszą, ani po ostatniej T -pozycji. To daje warunki:

$$p_1 - 1 \leq 2, \quad p_2 - p_1 - 1 \leq 2, \quad 8 - p_2 \leq 2.$$

Tj. $p_1 \leq 3$, $p_2 \geq 6$, $p_2 - p_1 \leq 3$. Z $p_2 \geq 6$ i $p_2 \leq p_1 + 3 \leq 6$ wynika $p_2 = 6$ oraz $p_1 = 3$ – jest to **jedyna** możliwa para pozycji.

Liczba sprzyjających ustawień: liczby 3 i 6 obsadzają miejsca 3 i 6 w 2! sposobach; pozostałe 6 liczb ze zbioru $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ zajmują pozostałe 6 miejsc w 6! sposobach.

$$|A| = 2! \cdot 6! = 1440, \quad |\Omega| = 8! = 40\,320.$$

$$P(A) = \frac{1440}{40\,320} = \frac{1}{28}.$$

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{28}$

Zadanie 3. (3 pkt)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}.$$

Dowód. Niech $x, y > 0$. Pomnóżmy obie strony nierówności przez $x^2y^2 > 0$ (znak nierówności zachowuje się):

$$xy^2 + x^2y \leq x^3 + y^3.$$

Przekształcamy prawą stronę minus lewą:

$$x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = x^2(x - y) - y^2(x - y) = (x - y)(x^2 - y^2) = (x - y)^2(x + y).$$

Wartość $(x - y)^2 \geq 0$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, oraz $x + y > 0$ z założenia, więc

$$(x - y)^2(x + y) \geq 0,$$

co oznacza, że $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0$, czyli pierwotna nierówność jest spełniona. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$. ■

Zadanie 4. (3 pkt)

Punkty K, L są środkami odpowiednio boków AB i BC kwadratu $ABCD$ o boku długości a . Punkt M jest takim punktem na boku BC , że odcinki DK i KM są prostopadłe. Odcinek AL przecina odcinki DK oraz DM w punktach – odpowiednio – P oraz Q . Wykaż, że $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$.

Dowód. Wprowadzamy układ kartezjański: $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (a, a)$, $D = (0, a)$. Wtedy

$$K = \left(\frac{a}{2}, 0\right), \quad L = \left(a, \frac{a}{2}\right), \quad M = (a, m) \text{ dla pewnego } m \in [0, a].$$

Wyznaczenie M . $\overrightarrow{DK} = \left(\frac{a}{2}, -a\right)$, $\overrightarrow{KM} = \left(\frac{a}{2}, m\right)$. Z warunku $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{KM} = 0$:

$$\frac{a^2}{4} - am = 0 \implies m = \frac{a}{4}, \quad M = \left(a, \frac{a}{4}\right).$$

Równania prostych:

$$AL: y = \frac{x}{2}, \quad DK: 2x + y - a = 0, \quad DM: 3x + 4y - 4a = 0.$$

Punkt $P = AL \cap DK$: podstawiając $x = 2y$ do $DK: 4y + y - a = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{5}$, więc $P = (\frac{2a}{5}, \frac{a}{5})$.

Punkt $Q = AL \cap DM$: podstawiając $x = 2y$ do $DM: 6y + 4y - 4a = 0 \Rightarrow y = \frac{2a}{5}$, więc $Q = (\frac{4a}{5}, \frac{2a}{5})$.

Długość:

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{4a}{5} - \frac{2a}{5}\right)^2 + \left(\frac{2a}{5} - \frac{a}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2a}{5}\right)^2 + \left(\frac{a}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{25}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}. \quad \blacksquare$$

Zadanie 5. (4 pkt)

Rozwiąż nierówność $|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$.

Rozwiązanie. Zauważamy, że $|2x - 6| = 2|x - 3|$ oraz $|x^2 - 9| = |x - 3| \cdot |x + 3|$. Nierówność przyjmuje postać

$$2|x - 3| < |x - 3| \cdot |x + 3| \iff |x - 3|(|x + 3| - 2) > 0.$$

Przypadek $x = 3$: lewa strona równa 0, nierówność ostra niespełniona.

Przypadek $x \neq 3$: mamy $|x - 3| > 0$, więc warunek redukuje się do

$$|x + 3| > 2 \iff x + 3 > 2 \text{ lub } x + 3 < -2 \iff x > -1 \text{ lub } x < -5.$$

Łącząc z wykluczeniem $x = 3$:

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$

Zadanie 6. (4 pkt)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o skończonej liczbie wyrazów. Liczba wyrazów tego ciągu jest większa od 6. Pierwszy wyraz jest równy 1, ostatni wyraz jest równy -2025 . Drugi, trzeci i szósty wyraz tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n) .

Rozwiązanie. Niech d – różnica ciągu arytmetycznego, n – liczba wyrazów. Wówczas

$$a_2 = 1 + d, \quad a_3 = 1 + 2d, \quad a_6 = 1 + 5d.$$

Warunek geometryczny: $a_3^2 = a_2 \cdot a_6$:

$$(1 + 2d)^2 = (1 + d)(1 + 5d) \iff 1 + 4d + 4d^2 = 1 + 6d + 5d^2 \iff d^2 + 2d = 0.$$

Stąd $d = 0$ lub $d = -2$. Wartość $d = 0$ daje ciąg stały, sprzeczne z $a_n = -2025 \neq 1$. Zatem $d = -2$.

Liczba wyrazów: $a_n = 1 + (n - 1) \cdot (-2) = 3 - 2n = -2025 \Rightarrow n = 1014$, warunek $n > 6$ spełniony.

Suma:

$$S_{1014} = \frac{1014 \cdot (1 + (-2025))}{2} = 507 \cdot (-2024) = -1\,026\,168.$$

Odpowiedź: $S = -1\,026\,168$

Zadanie 7. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$.

Rozwiązanie. Podstawmy $t = 2x$. Równanie ma postać $\sin(3t) - 2\sin t = 0$. Korzystamy z tożsamości $\sin(3t) = 3\sin t - 4\sin^3 t$:

$$3\sin t - 4\sin^3 t - 2\sin t = 0 \iff \sin t - 4\sin^3 t = 0 \iff \sin t(1 - 4\sin^2 t) = 0.$$

Przypadek $\sin t = 0$: $t = k\pi$, czyli $2x = k\pi$, $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Przypadek $\sin^2 t = \frac{1}{4}$: $\sin t = \pm \frac{1}{2}$, czyli $t = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Stąd $2x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$, więc

$$x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Odpowiedź: $x = \frac{k\pi}{2}$ lub $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Zadanie 8. (4 pkt)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym. Długość okręgu opisanego na podstawie ABC jest równa $6\sqrt{2}\pi$, a cosinus kąta między krawędziami bocznymi SB i SC jest równy $\frac{5}{9}$. Oblicz długość krawędzi podstawy ABC oraz cosinus kąta między ścianami bocznymi SAC i SBC tego ostrosłupa.

Rozwiązanie.

Krawędź podstawy $a = |AB|$. Z $2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$ otrzymujemy $R = 3\sqrt{2}$. Dla trójkąta równobocznego $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, więc

$$a = R\sqrt{3} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{6}.$$

Krawędź boczna $b = |SA| = |SB| = |SC|$. W trójkącie SBC z twierdzenia cosinusów:

$$a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos(\angle BSC) = 2b^2 \left(1 - \frac{5}{9}\right) = \frac{8b^2}{9} \implies b^2 = \frac{9a^2}{8} = \frac{9 \cdot 54}{8} = \frac{243}{4}.$$

Kąt dwuścienny SAC – SBC wzdłuż krawędzi SC . Wybieramy punkt $F \in SC$ taki, że $AF \perp SC$ (mierzymy w płaszczyźnie SAC). Z symetrii ostrosłupa prawidłowego $BF \perp SC$ także (w płaszczyźnie SBC). Kątem dwuściennym jest $\angle AFB$.

W trójkącie SAC równoramiennym ($|SA| = |SC| = b$, $|AC| = a$) niech $|SF| = tb$. Z trójkątów prostokątnych SAF i CAF (AF to wysokość z A):

$$b^2 = t^2 b^2 + AF^2, \quad a^2 = (1-t)^2 b^2 + AF^2,$$

odejmując: $a^2 - b^2 = (1-t)^2 b^2 - t^2 b^2 = (1-2t)b^2$, czyli

$$1 - 2t = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{54 - \frac{243}{4}}{\frac{243}{4}} = \frac{216 - 243}{243} = -\frac{27}{243} = -\frac{1}{9},$$

więc $t = \frac{5}{9}$, a $AF^2 = b^2(1-t^2) = \frac{243}{4} \cdot \frac{56}{81} = \frac{56 \cdot 3}{4} = 42$, $AF = \sqrt{42}$.

Z symetrii $BF = \sqrt{42}$. Z twierdzenia cosinusów w trójkącie AFB z $|AB| = a = 3\sqrt{6}$:

$$\cos(\angle AFB) = \frac{AF^2 + BF^2 - AB^2}{2 \cdot AF \cdot BF} = \frac{42 + 42 - 54}{2 \cdot 42} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}.$$

Odpowiedź: $|AB| = 3\sqrt{6}$; $\cos(\angle SAC-SBC) = \frac{5}{14}$

Zadanie 9. (5 pkt)

W kartezjańskim układzie współrzędnych punkty $A = (1, -1)$ oraz $B = (4, 0)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , w którym $|CA| = |CB|$. Jedno z ramion trójkąta ABC zawiera się w prostej o równaniu $x + 2y - 4 = 0$. Na boku AC tego trójkąta obrano taki punkt M , że $|AM| : |MC| = 1 : 4$. Wyznacz równanie okręgu, który ma środek w punkcie M i przechodzi przez punkt C .

Rozwiązanie.

Identyfikacja ramienia. Sprawdzamy, czy A albo B leżą na prostej $\ell: x + 2y - 4 = 0$:

$$A: 1 + 2(-1) - 4 = -5 \neq 0, \quad B: 4 + 0 - 4 = 0 \checkmark.$$

Ponieważ trójkąt jest równoramienny z $|CA| = |CB|$, ramionami są CA i CB , podstawą AB . Skoro $A \notin \ell$, a $B \in \ell$, to ramieniem zawartym w ℓ jest CB – czyli punkt C leży na prostej ℓ .

Symetralna AB . C leży też na symetralnej AB . Środek AB to $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$, $\overline{AB} = (3, 1)$, więc symetralna ma równanie $3x + y - 7 = 0$.

Wyznaczenie C . Z układu

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

z pierwszego $x = 4 - 2y$, podstawiamy: $3(4 - 2y) + y - 7 = 0 \Rightarrow 5 - 5y = 0 \Rightarrow y = 1, x = 2$. Czyli $C = (2, 1)$.

Weryfikacja: $|CA| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = |CB| = \sqrt{4+1}$. \checkmark

Punkt M . $|AM| : |MC| = 1 : 4$, więc M dzieli AC w stosunku $1 : 4$ od A :

$$M = A + \frac{1}{5}(C - A) = (1, -1) + \frac{1}{5}(1, 2) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Promień: $r = |MC|$, więc

$$r^2 = \left(\frac{6}{5} - 2\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - 1\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{64}{25} = \frac{80}{25} = \frac{16}{5}.$$

Odpowiedź: $\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$

Zadanie 10. (5 pkt)

Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m , gdzie $m \neq 0$, dla których funkcja kwadratowa f określona wzorem

$$f(x) = m^2x^2 - 2mx - m + 1$$

ma dwa różne miejsca zerowe x_1 oraz x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$.

Rozwiązanie. Ponieważ $m \neq 0$, mamy $m^2 > 0$ – parabola otwiera się w górę. Warunki konieczne i wystarczające, by oba pierwiastki leżały w $(-2, 2)$:

(i) **Dyskryminant** > 0 .

$$\Delta = (2m)^2 - 4m^2(1 - m) = 4m^2 - 4m^2 + 4m^3 = 4m^3 > 0 \iff m > 0.$$

(ii) $f(-2) > 0$. $f(-2) = 4m^2 + 4m - m + 1 = 4m^2 + 3m + 1$. Wyróżnik: $9 - 16 = -7 < 0$, więc $f(-2) > 0$ dla każdego m . \checkmark

(iii) $f(2) > 0$. $f(2) = 4m^2 - 4m - m + 1 = 4m^2 - 5m + 1 = (4m - 1)(m - 1)$. Warunek > 0 daje $m < \frac{1}{4}$ lub $m > 1$.

(iv) **Wierzchołek** $x_w = \frac{1}{m} \in (-2, 2)$. Dla $m > 0$ mamy $\frac{1}{m} > 0 > -2$ automatycznie; $\frac{1}{m} < 2 \iff m > \frac{1}{2}$.

Część wspólna:

$$m > 0 \cap \left(m < \frac{1}{4} \vee m > 1\right) \cap m > \frac{1}{2}.$$

Gałąź $m < \frac{1}{4}$ z $m > \frac{1}{2}$ jest sprzeczna; zostaje $m > 1$.

Weryfikacja dla $m = 2$: $f(x) = 4x^2 - 4x - 1$, $\Delta = 16 + 16 = 32$, pierwiastki $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \approx -0,21; 1,21$ – oba w $(-2, 2)$. ✓

Granica $m = 1$: $f(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$, pierwiastki 0 i 2; $2 \notin (-2, 2)$, więc $m = 1$ słusznie wykluczone.

Odpowiedź: $m \in (1, +\infty)$

Zadanie 11. (6 pkt)

W czworokącie $ABCD$ są dane: $|AB| = 9$, $|AD| = 10$ oraz $|\angle BAD| = 60^\circ$. W ten czworokąt wpisano okrąg oraz na tym czworokącie opisano okrąg. Oblicz długości boków BC i CD oraz pole czworokąta $ABCD$.

Rozwiązanie.

Z opisanego okręgu na czworokącie (czworokąt jest cykliczny): suma przeciwległych kątów wynosi 180° , więc

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 120^\circ.$$

Z wpisanego okręgu w czworokąt (czworokąt jest styczny): warunek Pitota – suma długości przeciwległych boków jest równa:

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD| \iff 9 + |CD| = |BC| + 10 \iff |CD| = |BC| + 1.$$

Przekątna BD . W $\triangle ABD$ z twierdzenia cosinusów:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cos 60^\circ = 81 + 100 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 181 - 90 = 91.$$

Wyznaczenie BC . Niech $|BC| = t$, $|CD| = t + 1$. W $\triangle BCD$ z $\angle BCD = 120^\circ$ i $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$:

$$|BD|^2 = t^2 + (t + 1)^2 + t(t + 1) = 3t^2 + 3t + 1 = 91.$$

Stąd $3t^2 + 3t - 90 = 0$, czyli $t^2 + t - 30 = 0$. Pierwiastki: $t = \frac{-1 \pm 11}{2}$, dodatni $t = 5$.

Zatem $|BC| = 5$ oraz $|CD| = 6$.

Weryfikacja: $9 + 6 = 15 = 5 + 10$. ✓

Pole czworokąta.

$$P = P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \sin 120^\circ = \frac{45\sqrt{3}}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2} = \frac{60\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}.$$

(Alternatywnie: dla czworokąta dwuokręgowego $P = \sqrt{abcd} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10} = \sqrt{2700} = 30\sqrt{3}$.)

Odpowiedź: $|BC| = 5$, $|CD| = 6$, $P_{ABCD} = 30\sqrt{3}$

Zadanie 12. (kontekst)

Trójkątny kwietnik o kształcie trójkąta równoramiennego, podstawa długości x m, $x \leq 10$. Na kwietniku znajduje się fontanna w kształcie koła o średnicy 4 m, styczna do każdego z boków trójkąta. Cel: zminimalizować pole kwietnika.

Zadanie 12.1 (3 pkt) – wyprowadzenie wzoru**Dowód, że** $P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$.Niech h – wysokość trójkąta, b – ramię. Z twierdzenia Pitagorasa:

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Pole $P = \frac{1}{2}xh$. Promień okręgu wpisanego $r = 2$ (średnica 4). Ze wzoru $r = \frac{P}{s}$, gdzie $s = \frac{x + 2b}{2} = \frac{x}{2} + b$:

$$2 = \frac{\frac{1}{2}xh}{\frac{x}{2} + b} \implies xh = 2x + 4b \implies b = \frac{x(h - 2)}{4}.$$

Wstawiamy do $b^2 = h^2 + \frac{x^2}{4}$ i mnożymy przez 16:

$$x^2(h - 2)^2 = 16h^2 + 4x^2.$$

Zauważamy $(h - 2)^2 - 4 = (h - 2 - 2)(h - 2 + 2) = (h - 4) \cdot h$, więc

$$x^2(h - 2)^2 - 4x^2 = 16h^2 \iff x^2h(h - 4) = 16h^2.$$

Dla $h > 0$ dzielimy przez h :

$$x^2(h - 4) = 16h \iff h(x^2 - 16) = 4x^2 \iff h = \frac{4x^2}{x^2 - 16}.$$

(Warunek $h > 0$ daje $x^2 > 16$, czyli $x > 4$ – co potwierdza dziedzinę.)

$$P(x) = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 16} = \frac{2x^3}{x^2 - 16}. \quad \blacksquare$$

Zadanie 12.2 (4 pkt) – minimum polaPole $P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$ dla $x \in (4, 10]$.**Pochodna:**

$$P'(x) = \frac{6x^2(x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2} = \frac{6x^4 - 96x^2 - 4x^4}{(x^2 - 16)^2} = \frac{2x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2}.$$

Mianownik dodatni, $2x^2 > 0$ na $(4, 10]$. Znak $P'(x)$ równy znakowi $(x^2 - 48)$:

- $P'(x) < 0$ dla $x \in (4, 4\sqrt{3})$,
- $P'(x) = 0$ w $x = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \in (4, 10]$,
- $P'(x) > 0$ dla $x \in (4\sqrt{3}, 10]$.

Funkcja P ma w $x = 4\sqrt{3}$ minimum lokalne, a ponieważ jest to jedyny punkt krytyczny w dziedzinie i P jest ciągła na $(4, 10]$, jest to także minimum globalne.**Wartość minimalna:**

$$P(4\sqrt{3}) = \frac{2(4\sqrt{3})^3}{(4\sqrt{3})^2 - 16} = \frac{2 \cdot 64 \cdot 3\sqrt{3}}{48 - 16} = \frac{384\sqrt{3}}{32} = 12\sqrt{3}.$$

Kontrola: $P(10) = \frac{2000}{84} = \frac{500}{21} \approx 23,81 > 12\sqrt{3} \approx 20,78$. ✓**Odpowiedź:** $x = 4\sqrt{3}$ m, $P_{\min} = 12\sqrt{3}$ m²

Tabela zbiorcza odpowiedzi

| Zad. | Punkty | Odpowiedź |
|-------------|-----------|---|
| 1 | 2 | $\frac{1}{3}$ |
| 2 | 3 | $P(A) = \frac{1}{28}$ |
| 3 | 3 | (dowód: sprowadzenie do $(x - y)^2(x + y) \geq 0$) |
| 4 | 3 | (dowód: $P = (2a/5, a/5)$, $Q = (4a/5, 2a/5)$, $ PQ = a\sqrt{5}/5$) |
| 5 | 4 | $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$ |
| 6 | 4 | $S_n = -1\,026\,168$ |
| 7 | 4 | $x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ |
| 8 | 4 | $ AB = 3\sqrt{6}$; $\cos \varphi = \frac{5}{14}$ |
| 9 | 5 | $\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$ |
| 10 | 5 | $m \in (1, +\infty)$ |
| 11 | 6 | $ BC = 5$, $ CD = 6$, $P = 30\sqrt{3}$ |
| 12.1 | 3 | (dowód: $h = 4x^2/(x^2 - 16)$, $P = \frac{1}{2}xh$) |
| 12.2 | 4 | $x = 4\sqrt{3}$ m, $P_{\min} = 12\sqrt{3}$ m ² |
| Suma | 50 | |

Pipeline weryfikacji

- Faza 1: rozwiązanie własne (prover) – 12 zadań, 13 odpowiedzi.
- Faza 2: cold verifier w worktree-isolation – niezależne rozwiązanie 12 zadań.
- Wynik: 13/13 zgodności (100%) od strzału; brak konfliktów wymagających trzeciego sędziego.
- Faza 4 (ten dokument): finalizacja w L^AT_EX.
- Faza 5 (kolejny krok): erdos-verifier-prod jako matematyczny referee dowodów.